CIP 法を用いた電磁界解析

レー ヴー フン

1. まえがき

電磁界の時間領域数値解析法の開発は，近年，工学的に非常に注目されている分野である[1]．これらの時間領域法の利点としては，解析領域内の電磁界の時間的な変化が視覚的に明瞭にわかることがあげられる．

現在の電磁界の時間領域数値解析法の主流は Finite Difference Time Domain Method (FDTD法)と言えよう．しかし，FDTD法は差分近似によって Maxwell の方程式を解く手法であるため，差分を用いることによる誤差が必ず発生する．すなわち，FDTD 法では高周波領域での位相誤差が発生するため，セルサイズと発生源の信号の関係によっては，電磁界の伝搬が正しく解析できない場合があることが指摘されている．

また，時間離散間隔と空間離散間隔を修正関数で置き換えることにより，位相を低減した Non-Standard FDTD 法[2]も提案されたが，元来設定した周波数においてのみ位相誤差が理論上ゼロとなる手法であり，汎用性に欠ける問題を有している．

一般に，電磁界の数値解析を行う場合，解析空間を格子状に離散化するため，格子を細かくするほど計算精度は向上するが，計算に必要なメモリは大きくなる．数値計算においてはこのトレード・オフは必ず発生するものであり，数値計算を実行する場合は常にこのことを意識する必要がある．一般には，計算機のメモリには限界があるため，この限られたメモリの中でできるだけ精度のよい数値計算を行うことが望まれる．

この問題の解決法の一つとして，近年，Constrained Interpolation Profile (CIP 法)が提案されている．この CIP 法は，Yabe らによって提案された数値計算の新しい手法である[3]．この CIP 法の特徴は格子点上の値に加え，格子点上の微分値も伝搬させる点にある．

本研究では，Maxwell の電磁界解析に対し，CIP 法を導入することによって，これを考慮した電磁界解析に対する CIP 法の定式化を行った．さらに，得られた解析結果を FDTD 法と比較することで，本解析手法の有効性を検討した．

2. CIP 法

CIP 法は，一般な 1 次元移流方程式を解く方法であり，グリッドセル間のプロファイルを 3 次多項式で補間する方法である．

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

ここで f，v はそれぞれ移流する物理量と速度である．この方程式は物理量 f がそのままの形状を保ったまま速度 v で移流することを示している．そのため，この式では図 1(a)の実線で示した波形の概形は，時刻 Δt 後には $v\Delta t$ の距離をそのままの形で，破線で示した波形の概形のように移動する．

(1)の解は，次式を満たす．

$$f(x_i, t+\Delta t) \approx f(x_i - v\Delta t, t) \tag{2}$$

x_i は，空間の離散配置，Δt は時間離散間隔である．$v > 0$ のとき，x_{i-1} と x_i の間を次の 3 次多項式で補間する．

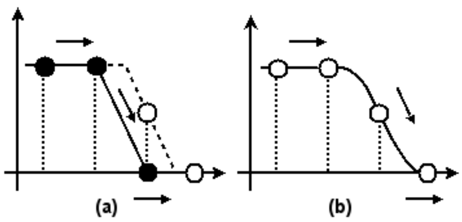

図 1　CIP 法の原理図

$$F_i(x) = a_i X^3 + b_i X^2 + g_i X + f_i \tag{3}$$

ただし，$X = x - x_i$ とする．

さらに，CIP 法では，f の伝搬とともに勾配値 g も移流することを考慮し，次式を満たす．

$$\frac{\partial g}{\partial t} + v\frac{\partial g}{\partial x} = -g\frac{\partial v}{\partial x} \tag{4}$$

ここで g は $\partial f/\partial x$ である．そしてこの方式は，$\partial v/\partial x$ が零の場合，すなわち位置により速度変化がない場合には，式(1)と同じ移流方程式となる．すなわち，物理量 f の微分値 g もそのままの形状を保ち速度 v で移流することを示している．CIP 法を用いた移流方程式の計算では，この制限を加えることにより図 1(b)に示すように元の波形により近く計算が可能となる．

未知数は a_i，b_i の 2 つとなり，次式より求める．

$$F_i(x_{i-1}) = f_{i-1} \tag{5}$$

$$\frac{\partial F_i(x_{i-1})}{\partial x} = g_{i-1} \tag{6}$$

式(3)，(5)，(6) より，

$$a_i = \frac{(g_i + g_{i-1})}{\Delta x^2} - \frac{2(f_i - f_{i-1})}{\Delta x^3} \tag{7}$$

$$b_i = \frac{3(f_{i-1} - f_i)}{\Delta x^2} + \frac{(2g_i + g_{i-1})}{\Delta x} \tag{8}$$

ただし，$\Delta x = x_i - x_{i-1}$

ここで，式(2)より

$$f_i^{n+1} = a_i\xi^3 + b_i\xi^2 + g_i\xi + f_i \tag{9}$$

$$g_i^{n+1} = 3a_i\xi^2 + 2b_i\xi + g_i \tag{10}$$

ただし，$\xi = -v\Delta t$ である．

$v < 0$ のとき，x_i と x_{i-1} の間で補間し，$\Delta x \to -\Delta x$，$i-1 \to i+1$ と置き換えればよい．

3. CIP 法の電磁界方程式への適用

式(11)及び(12)にファラデーの法則及びアンペールの法則を示す．

$$\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\nabla \times \boldsymbol{E} \tag{11}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma\boldsymbol{E} + \varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{12}$$

ただし，σ，μ 及び ε はそれぞれ導電率，透磁率及び誘電率とする．ここで，以下の展開を分かりやすくするために，$\boldsymbol{E} = (0,\ E_y,\ 0)$ 及び $\boldsymbol{H} = (0,\ 0,\ H_z)$ とし，x 方向のみの 1 次元解析と仮定する．また，ここでは，媒質は無損失として，$\sigma = 0$ とすると，式(11)及び式(12)は以下の式(13)及び(14)のように表すことができる．

$$\mu\frac{\partial H_z}{\partial t} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0 \tag{13}$$

$$\varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 \tag{14}$$

更に，これらの 2 式から，和と差をとることで，式(15)及び式(16)を得る．

$$\frac{\partial(E_y - ZH_z)}{\partial t} + v\frac{\partial(E_y - ZH_z)}{\partial x} = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial(E_y + ZH_z)}{\partial t} - v\frac{\partial(E_y + ZH_z)}{\partial x} = 0 \tag{16}$$

ここで，$Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$，$v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ とする．更に，微分値についても，式(17)及び式(18)のように表すことができる．

$$\frac{\partial(\partial_x E_y - Z\partial_x H_z)}{\partial t} + v\frac{\partial(\partial_x E_y - Z\partial_x H_z)}{\partial x} = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial(\partial_x E_y + Z\partial_x H_z)}{\partial t} - v\frac{\partial(\partial_x E_y + Z\partial_x H_z)}{\partial x} = 0 \tag{18}$$

ここで，$\partial_x E_y = \partial E_y/\partial x$ 及び $\partial_x H_z = \partial H_z/\partial x$ とする．式(15)，式(16)，式(17)及び式(18)は $E_y \pm ZH_z$ 及び $\partial_x E_y \pm Z\partial_x H_z$ の移流方程式であるから，これら 4 つの式に CIP 法を適用することによって x 方向の電磁界の伝搬を解くことができる．

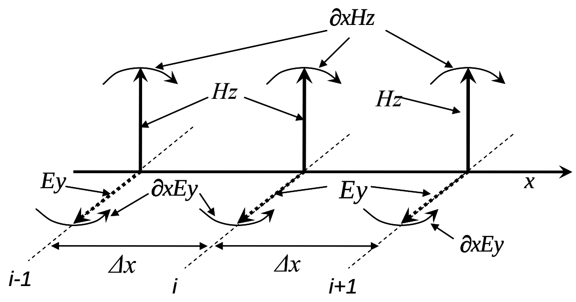

図 2　CIP 法解析における 1 次元のグリッドモデル

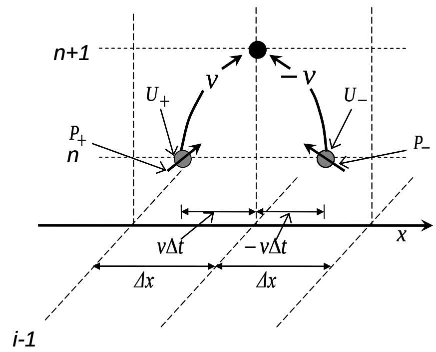

図 3　x 方向の U, P の計算の模式図

図 2 に 1 次元電磁界を，CIP 法を用いて行う場合のグリッドモデルを示す．本手法では電界，磁界ともにグリッド上に配置する．したがって，広く使われている Yee セルを用いた FDTD 法とは異なり，本研究では電界と磁界の半セルのずれは存在しない．また，各グリッド上に，それぞれの成分の微分値 $\partial_x E_y$，$\partial_x H_z$ を配置する．次に，グリッド上の値を用いた CIP 法での定式化を述べる．図 3 に，CIP 法による移流計算のモデルを示す．以下では，$+x$ 方向に伝搬する U_+，P_+ についてのみを示しているが，その他の成分 U_-，P_- についても同様に示される．

ただし，$U_+ = E_y - ZH_z$，$U_- = E_y + ZH_z$，$P_+ = \partial_x E_y - Z\partial_x H_z$，$P_- = \partial_x E_y + Z\partial_x H_z$ とする．同図より，x 方向へ伝搬する $U_\pm$ 及び $P_\pm$ は，

$$U_\pm^{n+1}(i) = a\xi^3 + b\xi^2 + P_\pm^n(i)\xi + U_\pm^n \qquad (19)$$

$$P_\pm^{n+1}(i) = 3a\xi^2 + 2b\xi + P_\pm^n(i) \qquad (20)$$

となる．ただし，

$$a = \frac{P_\pm^n(i) + P_\pm^n(i \mp 1)}{(-\Delta x)^2} + \frac{2\left\{U_\pm^n(i) - U_\pm^n(i \mp 1)\right\}}{(-\Delta x)^3} \qquad (21)$$

$$b = \frac{3\left\{U_\pm^n(i \mp 1) - U_\pm^n(i)\right\}}{(-\Delta x)^2} - \frac{2P_\pm^n(i) + P_\pm^n(i \mp 1)}{-\Delta x} \qquad (22)$$

$$\xi = \mp v\Delta t \qquad (23)$$

で複号は同順である．ここで，Δx 及び Δt はそれぞれ x 方向の格子サイズ及び時間刻みとする．

式(24)から式(27)までを使用し，i 点における $n+1$ の時刻での電磁界の成分を求めると次のようになる．

$$H_z^{n+1}(i) = -\frac{U_+^{n+1}(i) - U_-^{n+1}(i)}{Z_+ + Z_-} \qquad (24)$$

$$E_y^{n+1}(i) = \frac{1}{2}\left\{ U_+^{n+1}(i) + U_-^{n+1}(i) + H_z^{n+1}(i)(Z_+ + Z_-) \right\} \qquad (25)$$

$$\partial_x H_z^{n+1}(i) = -\frac{P_+^{n+1}(i) - P_-^{n+1}(i)}{Z_+ + Z_-} \qquad (26)$$

$$\partial_x E_y^{n+1}(i) = \frac{1}{2}\left\{ P_+^{n+1}(i) + P_-^{n+1}(i) + \partial_x H_z^{n+1}(i)(Z_+ + Z_-) \right\} \qquad (27)$$

4. 計算結果

最初の解析例として，初期条件を次のように設定する．

$$E_y = 0.5\exp\left\{-\left(\frac{x-50}{\sigma}\right)\right\}, H_z = 0 \qquad (28)$$

真空において x 方向のみの 1 次元の伝搬とし，$\sigma = 5.0$，格子サイズは $\Delta x = 0.02[m]$，時間刻みは $\Delta t = 0.002[s]$ とする．また，x 方向の格子数 N は 100 とする．

E_y と H_z の計算結果を図 4 に示す．また，図 5 には CIP 法による計算と同じ条件 FDTD 法を用いて計算した結果を示す．これは初期条件がガウス分布であり，比較的緩やかな初期条件の場合で両者に大きな違いは見られな

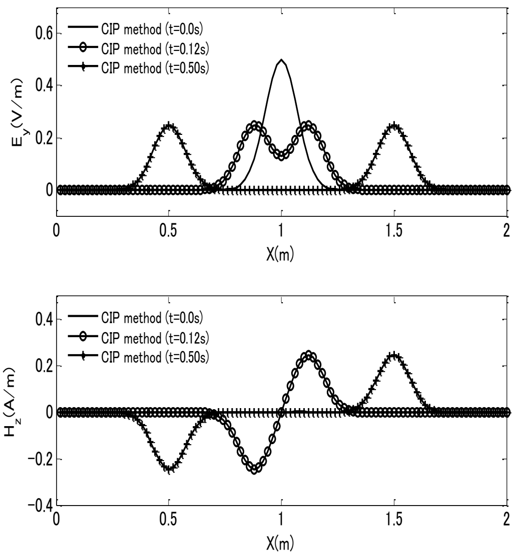

図 4　CIP 法による電界と磁界の伝播

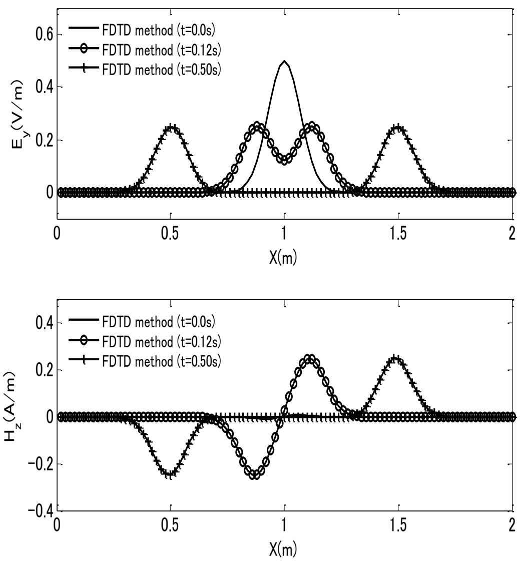

図 5　FDTD 法による電界と磁界の伝播

いことが分かる.

次に極端に厳しい条件の場合を扱う.

$$E_y = \begin{cases} 1 & 0.4m \le x \le 0.6m \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}, H_z = 0 \quad (29)$$

伝搬はx方向のみの 1 次元とし，格子サイズは $\Delta x = 0.005[m]$ ，時間刻みは $\Delta t = 0.001[s]$とする. また， x方向の格子数Nは 200 とする.

前節の定式化を用いて計算した結果を図 6 に示す. また，図 7 にはCIP 法による計算と同じ条件(セルサイズ$\Delta x = 0.005[m]$，時間刻みは$\Delta t = 0.001[s]$)で FDTD 法を用いて計算した結果を示す.

初期条件を矩形波にしただけであるが，CIP 法は前述の通り全く問題なく解けるのに対して, FDTD 法では不連続近傍で非常に大きな数値振動が発生していることが分かる. これは, FDTD 法の式に原因がある. これらの式は，見て明らかなように時間・空間についての中心差分になって，ともに 2 次精度になっている. また，高周波成分の位相誤差によって大きな数値振動も発生している.

もう 1 つの問題点として「境界条件」の問題がある. 電磁波解析に限らず，数値解析において計算領域は当然限られているので，電磁波が境界に到達したときに，通常は境界をすり抜けていく状況の方が圧倒的に多いのである. このような境界条件を「自由条件」と呼ぶ. FDTD 法のような差分法ではこの「自由境界」がとても厄介な代物になる. 例えば最も単純な条件 $x=0$ の左端で $f(=E_y, H_z)|_{i=0} = f(=E_y, H_z)|_{i=1}$ ($x=2$ の右端でも同様)を CIP 法と FDTD 法に適用して最初の例で比較する.

図 8 はCIP 法及びFDTD 法の計算結果であるが，CIP 法は約$t = 0.74[s]$で境界に到達した波がそのまますり抜けていく($t = 1.26[s]$)のに対して, FDTD 法は境界に到達した波が反射して計算領域内部に戻っていることが分かる. FDTD 法では吸収境界条件を付加する必要がある.

次に，2 つの方法の格子依存性を比較するために，最初の例でのガウス分布の拡がりσを 5.0，1.5，0.5 と除々に小さくして波長を短くしてみる. 初期条件とそれぞれの初期条件に対する$t = 0.4[s]$の結果を図 9 に示す.

$\sigma = 5.0$の時は最初の例と同様ほとんど両者に差は見られないが， σ=1.5 になると FDTD 法では短波長の波が遅れ始めるために数値振動が発生し， $\sigma = 0.5$ではその振動が

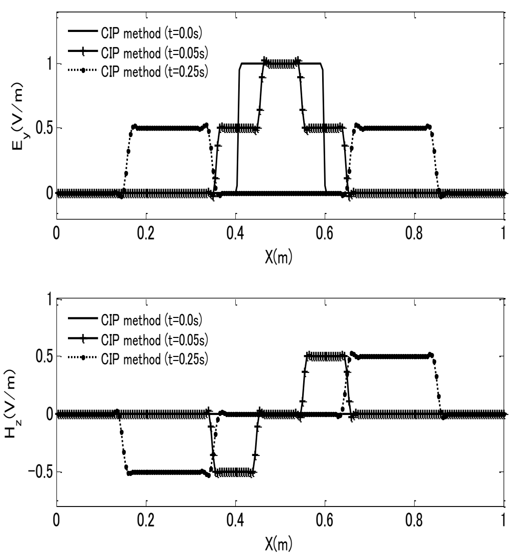

図 6　CIP 法による電界と磁界の伝播

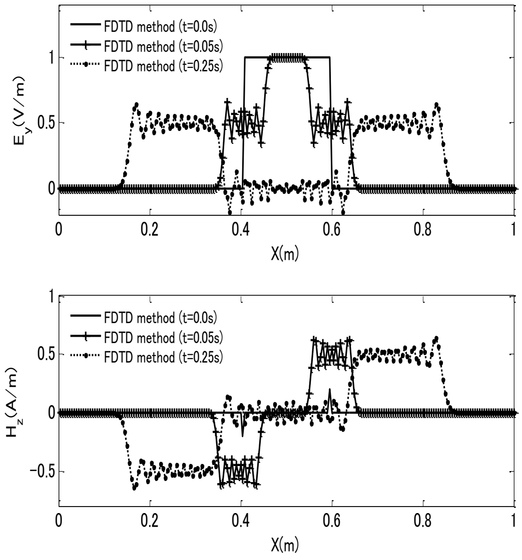

図 7　FDTD 法による電界と磁界の伝播

大きくなっている. CIP 法と FDTD 法において, 小さな σ では振幅が解析解より小さくなっているが, 初期条件の時点で $\sigma = 0.5$ ではガウス分布を僅か 5 メッシュで表していることを考えれば当然である. ここで大事なのは, CIP 法はその僅かな格子数でも, すべての波の成分に対して正確な伝搬速度を与えるということと, 数値発振がほとんど無く保たれているという点である.

FDTD 法では格子点における E_y, H_z だけが必要である. 一方 CIP 法ではこれに加えて $\partial_x E_y$, $\partial_x H_z$ が必要であるため, FDTD 法と比べて *M* 元で *M+1* 倍のメモリ量は最低でも必要である. ただし $\Delta t = N\Delta x / v$ であれば, 補間は必要なく FDTD 法と同様 E_y, H_z のみのメモリ量でよい. 具体的に, 3 次元の場合では CIP 法が $N^3 \times 6$ 成分×4 バイト及び $N^3 \times 6$ 成分×2 成分×4 バイト(微分成分)が必要である. つまり, メモリ量は 72 N^3 バイトが必要である. 同じ条件の時, 微分成分を用いない FDTD 法では $N^3 \times 6$ 成分×4 バイト= 24 N^3 バイトだけが必要である. しかし, 同じ精度の時, FDTD 法が格子数の 2 倍又は 3 倍が必要である [4]. つまり, 192 N^3 バイト又は 648 N^3 バイトが必要である.

したがって, 同じ初期条件の時, FDTD 法でのメモリ量は CIP 法より小さくて済むが, 同じ精度の時, FDTD 法でのメモリ量は CIP 法より大きいなものが必要となる.

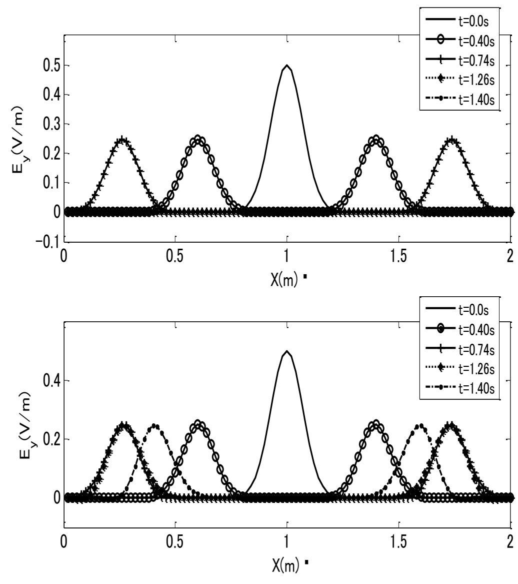

図 8 境界条件の比較. 上 : CIP 法, 下: FDTD 法

次に 2 次元電磁波伝搬の計算を行う. 計算領域は $x-y$ 平面で ($0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$) とし, 初期条件は次のように設定する. 格子サイズは $\Delta x = \Delta y = 0.01[m]$, 時間刻みは

$\Delta t = 0.2[s]$ とする．また， x 及び y 方向の格子数 N は 100 とする．

$$H_z(x,y) = \begin{cases} 1.0 & r < r_p \\ \exp\left\{-\left(\dfrac{r^2 - r_p^2}{\sigma^2}\right)\right\} & r \geq r_p \end{cases}$$

ここで，$r^2 = (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2$，$\sigma = 25$，

$r_p = 0.4[m]$， $x_c = y_c = 0.5[m]$．

図 10 は CIP 法による計算の結果である．

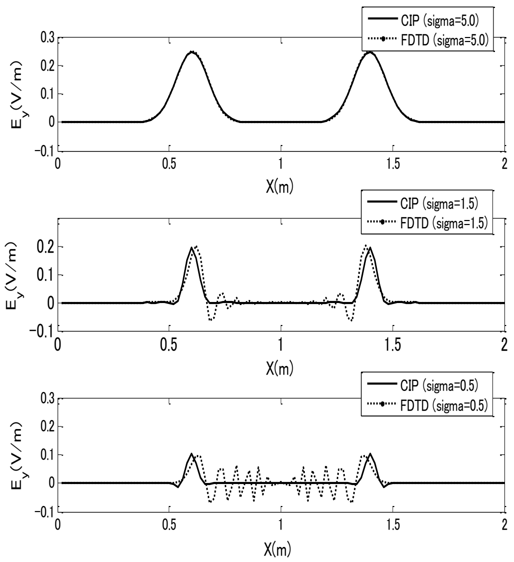

図 9　CIP 法と FDTD 法の比較．

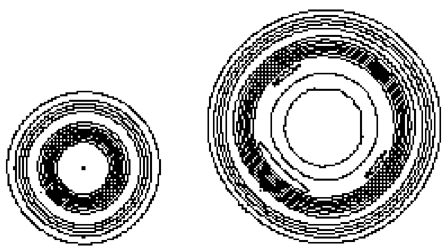

図 10　磁界 H_z の時間展開．
左：$t = 12[s]$，右：$t = 24[s]$

5．むすび

本研究では，矢部らが提案した CIP 法，特性曲線法を 1 次元の場合のマクスウェル電磁方程式に適用し，その定式化を行った．

そしてこの手法を用いて真空に伝搬する場合の電磁界解析を行い，その結果を FDTD 法による解析結果と比較した．

その結果，FDTD 法による計算結果では真空に伝搬する場合の電磁界解析の結果において，中心差分を用いていることによる不要な数値振動が見られた．一方で CIP 法における計算結果においてはこの場合においてそれが見られず，FDTD 法よりも CIP 法がより正確に解析できていることを確認した．また，境界条件でも優れている．CIP 法は，これからの展開が大きいに期待できる．

今後は，本手法の電磁界解析手法としての汎用性を高めるため，3 次元の場合へ拡張し，解析空間内に損失誘電体媒質および損失磁性体媒質が含まれる場合の検討を行う予定である．

参考文献

[1] 宇野亨，「FDTD 法による電磁界およびアンテナ解析」，コロナ社，1998.

[2] J. B. Cole, “A high-accuracy realization of the yee algorithm using non-standard finite difference,” *IEEE Trans. Microwave Theory & Tech.*, vol.45, no.6, pp.991-996, June. 1997.

[3] H. Takewaki and T. Yabe, “The Cubic-Interpolated Pseudo Particle (CIP) Method Application to Nonlinear and Multidimensional Hyperbolic Equations,” *J. Comput. Phys.*,Vol.70, pp.355-372, 1987.

[4] K. Okubo and N. Takeuchi, “Analysis of an Electromagnetic Field Created by Line Current Using Constrained Interpolation Profile Method,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol 55, no. 1, pp.111-119, 2007.

[5] 矢部 孝, 尾形 陽一, 滝沢 研二, 「CIP 法と Java による CG シミュレーション」, 森北出版, 2007.

[6] 矢部 孝, 尾形 陽一, 内海 隆行, 「CIP 法原子から宇宙までを解くマルチスケール解法」, 森北出版, 2007.